L'area del triangolo dalle coordinate dei vertici

Roberto Giacomelli
Articolo sul blog *http://robitex.wordpress.com*
e-mail: giaconet dot mailbox at gmail dot com

2 ottobre 2009

Sommario

In un sistema piano di coordinate cartesiane è possibile riferirsi ad un triangolo esprimendo le coordinate dei tre vertici. Ci chiediamo se sia possibile determinare l'area del triangolo utilizzando queste informazioni.

Indice

1 L'area dalle coordinate?

A pensarci questo è un problema forse poco noto. L'area del triangolo può essere facilmente ottenuta calcolando le lunghezze dei lati a partire dalle coordinate dei vertici ed applicando la più famosa formula di Erone. Ma è molto più semplice impiegare direttamente le coordinate...

1.1 Primo metodo

Il metodo utilizzato in questo post per determinare il baricentro del triangolo con il calcolo dei momenti statici consiste nel sommare il contributo con segno relativo a ciascun lato della figura considerando il trapezio che esso forma con l'asse cartesiano scelto.

Va bene, ma può essere utilizzato per determinare l'area del triangolo conoscendone le coordinate dei vertici?

Indichiamo i vertici con i numeri 1, 2, e 3, in questo modo sarà più semplice scrivere le coordinate dei vertici: $1 \equiv (x_1, y_1); 2 \equiv (x_2, y_2); 3 \equiv (x_3, y_3)$.

Dunque il trapezio sotteso al lato 12 ha area:

$$A_{12} = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)(y_1 + y_2).$$

Sommando le aree dei trapezi relativi ai tre lati otterremo l'area del triangolo. Occorre percorrere i lati in senso orario così da ottenere i giusti segni per le aree dei trapezi.

L'espressione finale piuttosto simmetrica è dunque:

$$A = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3).$$

I sei termini della relazione dell'area ricordano i determinanti di matrici 2 x 2. Il primo termine infatti può esser visto anche come:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

così alla fine l'area la possiamo riscrivere anche nella forma facile da ricordare e compatta (che bellezza, è un vero portento di eleganza):

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Se non siete pratici con determinanti e matrici sappiate che non è difficile imparare le basi dell'algebra lineare.

1.2 Secondo metodo

Il problema si può anche trattare con i vettori, ricordando che la norma del prodotto vettoriale è l'area del parallelogrammo da essi formato. Infatti il prodotto dei vettori di $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ ha norma pari a $uv \sin \alpha$, dove α è l'angolo da essi formato.

Se consideriamo i due vettori che hanno in comune il primo estremo coincidente con un vertice del triangolo e come secondo estremo i rimanenti distinti vertici, sarà sufficiente calcolare la norma del loro prodotto vettoriale per poi dividerla per due.

In termini espliciti considerando il triangolo appartenente al piano xy (con questo metodo è possibile determinare l'area di un triangolo comunque posizionato nello spazio tridimensionale), sappiamo che il vettore $\overrightarrow{12}$ ha componenti $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, che il vettore $\overrightarrow{13}$ ha componenti $(x_3 - x_1; y_3 - y_1)$, e che il prodotto vettoriale fra essi è il vettore dato dal determinante (che coincidenza, ancora un determinante):

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix}$$

che risolto fornisce direttamente la norma del prodotto poiché questo avrà una sola componente diretta come l'asse z che è:

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)$$

che fornisce appunto la conferma alla formula precedente.

Notate come il determinate della formula compatta dell'area del triangolo si trasforma sommando le colonne immediatamente nell'espressione sovrastante.

La matematica non finisce mai di stupire non è vero...? Ciao.

2 Licenza ed informazioni varie

2.1 Distribuzione/Citazioni

Ogni volta che usi o distribuisci parti ridistribuibili quest'opera devi farlo secondo i termini con cui esse sono state rilasciate e avendo cura di comunicare tali termini con chiarezza. Ricorda di inserire sempre un hyperlink alla risorsa che ridistribuisci o citi.

Il modo migliore per dimostrarmi il vostro apprezzamento è semplicemente quello di linkare direttamente le pagine del blog, senza copiare gli articoli in altri siti, oltre naturalmente a lasciare un commento. Ci sono però casi in cui vorreste poter estrapolare alcune parole dai miei articoli per incuriosire i vostri lettori. In quel caso la prassi convenuta e che, grazie a tutti i blogger seri, viene coscienziosamente rispettata, è questa:

- Creare un "blockquote", ossia un campo in cui è inserita una citazione;

- Inserire nel blockquote solo il primo periodo (le prime poche frasi) di un articolo, diciamo fino ad arrivare al link "Leggi il resto. . . ";
- Linkare la rimanente parte dell'articolo all'originale su http://robitex.wordpress.com.

Grazie per la collaborazione.

2.2 Colophon

Questo documento è stato composto con LaTeX attraverso uno script in Lua chiamato `wp2pdf` che elabora il file originale *html* del post pubblicato sul blog in WordPress. Si tratta di una versione migliorata del codice pubblicato sul blog stesso. Per saperne di più contattatemi via posta elettronica all'indirizzo nel titolo del documento, o lasciate un commento sul blog.