Le coordinate cartesiane del baricentro del triangolo

Roberto Giacomelli

11 agosto 2009

Sommario

Si ricerca l'espressione delle coordinate del baricentro di un triangolo note le coordinate dei vertici a partire dalla definizione in un percorso analitico del momento statico.

Se le costruzioni geometriche ci rivelano percorsi eleganti e meravigliosi, quelle cartesiane non sono da meno. Per esempio l'espressione delle coordinate del baricentro di un triangolo ed i calcoli della dimostrazione rispecchiano la simmetria della geometria in un incantevole eleganza.

1 Definizione di baricentro

Il baricentro di un corpo è il punto di coordinate ottenute dal rapporto del momento statico relativo ad un piano coordinato con la massa complessiva del corpo. Il momento statico è l'integrale della massa moltiplicata per la distanza dal piano coordinato considerato.

Nel caso di densità di massa omogenea e di figura piana il baricentro diventa un concetto puramente geometrico. Dalla definizione, introdotto un sistema di coordinate cartesiane, la sua posizione è la seguente:

$$x_G = \frac{1}{A}\int_A x dA; \tag{1}$$

$$y_G = \frac{1}{A}\int_A y dA. \tag{2}$$

2 Il baricentro del triangolo rettangolo

Applichiamo la definizione al caso di un triangolo rettangolo con i cateti paralleli agli assi e di vertici $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$. Tale risultato ci servirà per ottenere le coordinate del baricentro di un triangolo qualsiasi a partire dalle coordinate dei vertici.

Innanzi tutto possiamo riferirci alla sola coordinata y_G essendo del tutto analogo il calcolo della coordinata x_G, dunque con riferimento alla figura 1, l'area del triangolo è $y_2 x_2/2$, e la coordinata y_G si scrive:

$$y_G = \frac{\int_A y\, dA}{\int_A dA}$$

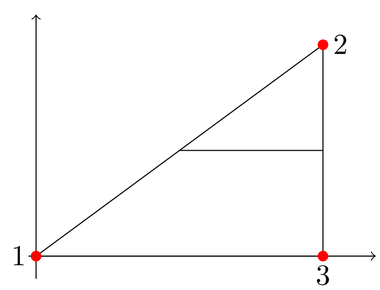

Figura 1: Baricentro e triangolo rettangolo

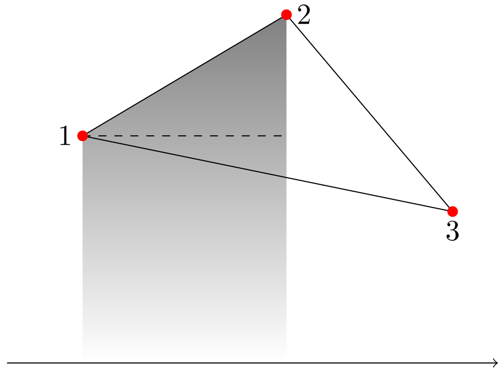

Figura 2: Trapezi e triangolo

L'integrale doppio della funzione y si può ridurre al calcolo di dell'integrale semplice notando che tale funzione naturalmente non varia al variare di x ($ydA = ydx\,dy = (ydy)dx$):

$$\int_A y\,dA = \int_o^{y_2} x_2 \frac{(y_2 - y)}{y_2} y\,dy = \frac{x_2\,y_2^2}{6}.$$

Terminiamo la sezione scrivendo il risultato finale:

$$y_G = \frac{y_2}{3}$$

3 Il triangolo come somma di trapezi

In figura 2 è rappresentato il trapezio formato dal primo lato del triangolo generico con l'asse x in colore grigio degradante. Se calcoliamo la distanza dall'asse del baricentro di questi tre trapezi otterremo la distanza del baricentro del triangolo poichè il terzo lato produrra un area negativa che ridurrà i primi due trapezi alla figura del triangolo. Qualsiasi sia la posizione del triangolo rispetto agli assi di riferimento il calcolo fornirà il valore corretto.

Indichiamo con y_G^{T1} la posizione del primo trapezio composta dal triangolo rettangolo e dal rettangolo sottostante. Tale coordianta si scriverà nel modo seguente considerando le due figure componenti (ciò è giustificato dalla proprietà degli integrali di suddividersi in domini componenti):

$$y_G^{T1} = \frac{y_1(x_2 - x_1)y_1/2 + 1/2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)(1/3(y_2 - y_1) + y_1)}{y_1(x_2 - x_1) + 1/2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} = \frac{1}{3}\frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{y_1 + y_2}$$

La formula della distanza dall'asse x del baricentro del triangolo, che semplificheremo è quindi questa:

$$y_g = \frac{y_G^{T1} A_{T1} + y_G^{T2} A_{T2} + y_G^{T3} A_{T3}}{A_{T1} + A_{T2} + A_{T3}}$$

sembra un po' complessa e non incline ad essere semplificata. Esplicitiamo il primo termine a numeratore sapendo che l'area del primo trapezio è $1/2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$:

$$y_G^{T1} A_{T1} = \frac{1}{3}\frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{y_1 + y_2} \cdot \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$$

che si semplifica nel termine:

$$\frac{1}{6}(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)(x_2 - x_1)$$

Tale termine comprende le coordinate del primo e del secondo vertice mentre, analogamente, il secondo ed il terzo conterranno le coordinate rispettivamente del secondo e del terzo vertice e del terzo e del primo vertice. Possiamo dire che i termini a numeratore sono disaccoppiati.

L'espressione completa di y_G è la seguente:

$$y_G = \frac{1}{3} \cdot \frac{(y_1^2+y_1y_2+y_2^2)(x_2-x_1)+(y_2^2+y_2y_3+y_3^2)(x_3-x_2)+(y_1^2+y_1y_3+y_3^2)(x_1-x_3)}{(x_2-x_1)(y_1+y_2)+(x_3-x_2)(y_2+y_3)+(x_1-x_3)(y_1+y_3)}$$

Con la guida fornita dalla simmetria, notiamo che il prodotto seguente compone parte del primo termine:

$$(y_1+y_2)(y_1+y_2+y_3) = y_1^2+y_1y_2+y_2^2+y_1y_2+y_2y_3+y_1y_3$$

e che qualsiasi sia il valore di k vale l'identità:

$$k(x_2-x_1)+k(x_3-x_2)+k(x_1-x_3) = 0.$$

Ponendo allora $k = y_1y_2+y_2y_3+y_1y_3$ sommiamo l'espressione al numeratore. Il primo termine diventa

$$\frac{1}{6}(y_1^2+y_1y_2+y_2^2+k)(x_2-x_1) = \frac{1}{6}(y_1+y_2)(y_1+y_2+y_3)(x_2-x_1)$$

il secondo

$$\frac{1}{6}(y_2^2+y_2y_3+y_3^2+k)(x_3-x_2) = \frac{1}{6}(y_2+y_3)(y_1+y_2+y_3)(x_3-x_2)$$

ed il terzo

$$\frac{1}{6}(y_1^2+y_1y_3+y_3^2+k)(x_1-x_3) = \frac{1}{6}(y_1+y_3)(y_1+y_2+y_3)(x_1-x_3)$$

Mettendo in evidenza l'espressione $y_1+y_2+y_3$, la coordinata del baricento ricercata è:

$$y_G = \frac{1}{3} \cdot \frac{(y_1+y_2+y_3)((y_1+y_2)(x_2-x_1)+(y_2+y_3)(x_3-x_2)+(y_1+y_3)(x_1-x_3))}{(y_1+y_2)(x_2-x_1)+(y_2+y_3)(x_3-x_2)+(y_1+y_3)(x_1-x_3)} = \frac{1}{3} \cdot (y_1+y_2+y_3). \square$$

Spero che il percorso seguito fin quì sia chiaro, altrimenti lasciate un commento nel blog (`http://robitex.wordpress.com/2009/08/11/coordinate-del-baricentro-del-triangolo/`) anche solo per segnalare errori.

Grazie ed alla prossima.